Séance 1 — 50 min. Document du professeur, jamais distribué. Les élèves suivent sur le cours complet, sans recopier. Aucune démonstration n'est au programme pour ce chapitre (celles du programme, Al-Kashi et $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, sont au chapitre 113).

Page de garde — Partie 1 *2 min*

Anecdote Sophie Germain (1776–1831), autodidacte, écrivit à Gauss à partir de 1804 sous le nom d'emprunt de « Monsieur Le Blanc », un ancien élève de l'École polytechnique, école alors fermée aux femmes. La citation vient de ses *Pensées diverses*, publiées après sa mort par Hippolyte Stupuy (1879, p. 264) : elle annonce le chapitre, où l'on démontre des angles droits par des calculs. *(MAA Convergence, « Quotations in context : Germain » ; MacTutor, biographie de S. Germain)*

Ce qu'on sait faire avec des vecteurs *3 min*

Au tableau Les trois rappels, en une ligne chacun : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (Chasles) ; $k\vec{u}$ a la direction de $\vec{u}$, le même sens si $k>0$, le sens contraire si $k<0$; $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$. Dans les trois cas, **le résultat est un vecteur**. Annoncer : aujourd'hui, une opération sur deux vecteurs qui donne **un nombre**.

I.A. Par projection orthogonale — Définition 1 *3 min*

Au tableau Deux vecteurs d'origines différentes : on les « ramène » à la même origine O, avec $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$. Cas oublié par la diapositive : si l'un des deux vecteurs est nul, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

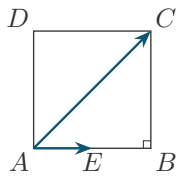
Anecdote Notations instables au début : l'Irlandais Matthew O'Brien, qui définit ces produits dans sept articles de 1847 à 1852, écrivait $u\times v$ pour le produit scalaire et $u\cdot v$ pour l'autre produit, l'inverse des notations actuelles. *(P. Lynch,* Bulletin of the Irish Mathematical Society, *n° 74)*

Définition 1 (suite) — les trois cas *5 min*

Au tableau Dessiner H, projeté de B sur (OA), dans chaque cas. Règle à faire dire : H sur la demi-droite $[OA)\Rightarrow +OA\times OH$; H de l'autre côté de $O\Rightarrow -OA\times OH$; $H=O\Rightarrow 0$. On projette *l'extrémité du second* vecteur sur la droite qui porte *le premier* : la question de l'ordre est réglée par le théorème 3.

Exemple 1 — carré de côté 5 *5 min*

E milieu de $[AB]$, donc $AE=2{,}5$. Le projeté orthogonal de C sur $(AE)=(AB)$ est B, du même côté de A que E :



Au tableau
$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=AE\times AB=2{,}5\times 5=12{,}5.$$

Insister : on ne calcule pas $AC=5\sqrt{2}$, la projection évite ce calcul.

Définition 2, exemple 2 *4 min*

Au tableau $\overrightarrow{AC}^2=AC^2=AB^2+BC^2=3^2+3^2=18$ (Pythagore dans ABC rectangle en B). Faire remarquer : un carré scalaire est toujours positif, et il est nul seulement pour le vecteur nul.

I.B. Théorème 1, exemple 3 *6 min*

Au tableau Rappel du chapitre 104 au tableau :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2},\quad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ex. 3 : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)=4\times 5\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=20\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-10$. Angle obtus, produit négatif : cohérent avec la diapositive précédente.

Anecdote C'est exactement la définition de Josiah Willard Gibbs, qui note $\alpha.\beta$ le « produit direct » de deux vecteurs : le produit de leurs longueurs par le cosinus de leur angle. Son petit livre de cours fut imprimé à compte d'auteur, pour ses étudiants de Yale. *(J. W. Gibbs,* Elements of Vector Analysis*, New Haven, 1881–1884, § 13)*

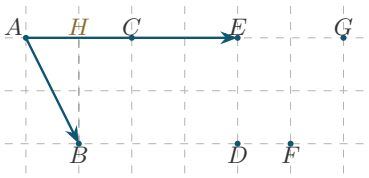
II. Définition 3, théorème 2 — *4 min*

Au tableau « Si et seulement si » : deux phrases en une. $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (un angle droit donne un produit nul) et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ (un produit nul prouve un angle droit). C'est la seconde qui sert à démontrer qu'un triangle est rectangle (exemple 5).

Anecdote « Orthogonal » vient du grec *orthos*, droit, et *gônia*, angle : « qui forme un angle droit ». *(CNRTL,* Trésor de la langue française informatisé*, « orthogonal »)*

III. Théorème 3, exemple 4 — *4 min*

Au tableau La symétrie répond à la question laissée ouverte par la définition 1. Ex. 4 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$; le projeté H de B sur (AE) est le milieu de $[AC]$, du même côté de A que E : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = AE \times AH = 4 \times 1 = 4$.



Théorème 4 et le cas $a = -1$ — *4 min*

Au tableau Avec $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$: $(2\vec{u}) \cdot \vec{v} = 6$, $\vec{u} \cdot (-5\vec{v}) = -15$, $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -3$. Changer le sens d'un des deux vecteurs change le signe du produit : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Théorèmes 5 à 8 — *5 min*

Au tableau Développer comme $(a+b)^2$: $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ (le théorème 3 réunit les termes du milieu).
Application avec $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 16 + 4 + 9 = 29$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 16 - 4 + 9 = 21$.
Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, le théorème 8 donne $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$: c'est le théorème de Pythagore.

Exemple 5 — triangle rectangle ou pas ? — *5 min*

Au tableau 1. $\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2 - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
Le projeté de A sur (BC) est H, du même côté de B que C, donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BC \times BH = 3 \times 1 = 3$ et le produit vaut $4 - 3 = 1$.
2. Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$.
3. $1 \neq 0$: d'après le théorème 2, l'angle en A n'est pas droit.

